DIDATTICA DELLE SCIENZE

Bimestrale per l'insegnamento delle scienze e della matematica

Direttore Mauro Laeng, docente di Pedagogia nell'Università di Roma

Numero 86 del febbraio 1980

Sommario

Fascicolo di 36 pagine più inserto redazionale.

Inserto

Questa terza parte della serie *Scienza della Terra* ha per argomento *Le grandi masse continentali e i loro spostamenti.* Lo sviluppo nel tempo del pensiero scientifico sull'argomento, man mano che nuove conoscenze e nuovi mezzi di indagine si offrivano allo studioso, fino alla moderna teoria della *Tettonica a zolle*, è presentato con una documentazione iconografica aggiornata ed esauriente.

In copertina

L'Italia fotografata dallo spazio. *Fotocolor della Sezione Teleosservazioni dell'Istituto per la Geografia della Litosfera del C.N.R. - Milano.* (Per il commento si veda a pag. 6).

Pubblicazione bimestrale - Anno XV - **Direttore Responsabile:** Vittorino Chizzolini - Autorizzazione del Tribunale di Brescia n. 228 del 31 Marzo 1965 - Spedizione in abbonamento postale - Gruppo IV/70 - **Direzione, Redazione, Amministrazione:** Editrice La Scuola - S.p.A. - 25100 Brescia, Via Luigi Cadorna, 11 - Conto corrente postale 17-603 - Tel. centr. (030) 47-461 - Telex 300836 SCUOLA.
Filiali: 40131 Bologna (Via L. Cipriani, 5, tel. (051) 239145 - telex 531141 SCUOBO); 20136 Milano (Viale Bligny, 7, tel. (02) 8370271 - telex 331836 SCUOMI); 00193 Roma (Via Crescenzio, 23, tel. (06) 655179 - 653989 - telex 614259 SCUORO); 80137 Napoli (Via S. Elia ai Miracoli, 19/21, tel. (081) 441200 - telex 720399 SCUONA); 70124 Bari (Via Giulio Petroni, 21 A/E, tel. (080) 228647 - telex 810391 SCUOBA).
Abbonamento annuo 1979-80: L. 8.500 (estero L. 11.000) - Un fascicolo L. 1.500 (arretrato il doppio).
Stampa: OFFICINE GRAFICHE LA SCUOLA - 25100 BRESCIA.

Carlo Felice Manara

INTUIZIONE E LOGICA.

Problemi didattici della matematica

1. - Si potrebbe dire che i problemi didattici della matematica sono sempre di moda, in certo senso, perché rappresentano un punto cruciale del problema didattico generale; in altre parole si potrebbe dire che le difficoltà ed i problemi dell'insegnamento della matematica riproducono in modo tipico e forse esaltato le difficoltà ed i problemi che si presentano nella didattica delle altre materie; e ciò sia detto senza voler insistere eccessivamente sulla distinzione tra le materie d'insegnamento nella scuola secondaria. Riteniamo infatti che il problema fondamentale della scuola sia quello della formazione dell'uomo, e che questa formazione non ammetta separazioni perché si riferisce, come « terminus ad quem », ad un essere umano che non possiede compartimenti stagni; è questa una delle ragioni per cui insistiamo da tempo per combattere la concezione che fa della matematica una materia prevalentemente informativa (una specie di male necessario), che deve essere insegnata per la sua utilità, dato lo stato di estrema matematizzazione della scienza e della tecnica di oggi. Al contrario abbiamo sempre insistito nel dire — per esempio — che il professore di matematica deve essere considerato come un insegnante della lingua materna, così come il professore che insegna espressamente l'italiano; perché la matematica dovrebbe formare alla chiarezza delle idee, alla univocità della espressione, alla chiarezza del discorso, al rigore della deduzione; e queste doti sono utilissime a chiunque voglia pensare ed esprimersi, in qualunque lingua.

Invero la concezione che relega la matematica nel campo delle materie strettamente strumentali si rifà ad una concezione della cultura che relegava le scienze particolari nel ghetto degli « pseudoconcetti »; questa concezione appare chiaramente superata e quindi è lecito pensare che se lo scopo della scuola è la formazione dell'uomo e del cittadino, a questo scopo collaborano tanto la cultura letteraria classica che la cultura scientifica.

2. - Va detto tuttavia che, se si vuole che la matematica in particolare e la scienza in generale non abbia questo complesso di inferiorità, occorre che i suoi insegnanti siano convinti di ciò che fanno, siano sicuri del valore della formazione che conferiscono; occorre inoltre che essi siano anche coscienti dei problemi logici, didattici, psicologici, che debbono essere analizzati e risolti, almeno nel limite del possibile, perché la loro materia non sia fine a se stessa, non sia considerata come un coacervo di informazioni necessarie, ma non formanti, ma si ponga invece come fondamento della formazione del discente. E propro in questo ordine di idee si vorrebbe insistere sull'idea che l'insegnamento della matematica non deve ridursi a trasmettere delle nozioni più o meno nuove o delle formule più o meno astratte, ma dovrebbe aiutare il discente alla analisi di quei procedimenti logici che sono spontaneamente adottati e seguiti da ogni uomo che ragiona. Ed a questo proposito riteniamo che l'insegnamento della geometria, nel senso classico del termine, sia di grandissima utilità; e riteniamo di doverlo ripetere qui, perché si direbbe che questo insegnamento sia oggi passato in secondo piano, in favore di una formalizzazione e di una algebrizzazione che suscita notevoli perplessità a riguardo della formazione della mentalità scientifica dei discenti.

A nostro parere invece, ci pare di poter dire che, nel campo della matematica, uno dei problemi didattici fondamentali consista nella ricerca di un equilibrio vitale tra la logica ed il complesso di procedimenti mentali che viene abitualmente chiamato « intuizione ».

A proposito di questo termine, vorremmo qui dire che esso ha, forse come non molti altri, un significato equivoco, perché richiama da una parte quei procedimenti immediati di cui abbiamo parlato prima e che si riferiscono all'uso ragionevole del linguaggio comune, e dall'altra richiama tutto un insieme di procedimenti di immaginazione che fanno parte di una elaborazione fantastica delle percezioni e delle sensazioni composite, che ci portano a volte a conclusioni poco rigorose dal punto di vista logico.

Uno degli argomenti di quest'ultimo tipo è per esempio quello che si riferisce alla cosiddetta *intuizione del continuo;* essa ha condizionato molti problemi della matematizzazione della realtà, ed ha condotto a dei modelli fisici che vengono chiamati impropriamente *intuitivi,* perché costituiscono una estrapolazione immaginativa delle nostre esperienze.

Tali sono, per esempio, i modelli della prima fisica quantistica, come il modello di Bohr, che estendeva alla scala atomica la modellistica planetaria che ha una sua certa validità alla scala umana ed anche alla scala astronomica.

È quindi spiegabile che, anche in sede didattica, vi sia una certa diffidenza nell'impiego della intuizione, e che si sia diffusa l'idea di un rigore matematico che dovrebbe essere del tutto diverso da quello tradizionale, che si rifà al modello euclideo. Su questi argomenti vorremme soffermarci in questa nostra riflessione, che vorrebbe sforzarsi di ricuperare il potere della fantasia e della invenzione attiva, che devono tuttavia sempre essere controllate dalla logica e dalla critica.

3. - La questione che abbiamo cercato di impostare si riattacca anche alla discussione della validità conoscitiva della geometria, ed in particolare della geometria classica euclidea. Questa problematica si ricollega naturalmente alla problematica della validità della nostra esperienza sensibile, ed alla elaborazione mentale, fantastica prima e poi logica, di tale esperienza. La diffidenza nei riguardi della esperienza dei sensi è tradizionale nella critica filosofica della conoscenza; essa è, si può dire, il contenuto delle prime elaborazioni filosofiche che l'umanità conosce, ed è forse il fondamento dei paradossi del continuo, che hanno una età veneranda e che hanno costituito uno stimolo classico alla riflessione sui problemi della nostra conoscenza. In epoca più recente, sono state avanzate delle critiche radicali alla impostazione euclidea della geometria, e queste critiche hanno portato ad una impostazione della didattica che ripudia il più possibile la trattazione geometrica delle questioni matematiche. Ci si domanda tuttavia se sia ragionevole, anche a livello didattico, oltre che di ricerca scientifica, ripudiare tutta una feconda e non facilmente delimitabile attività mentale, sul fondamento della critica, giusta nei propri limiti, della fallacia di quella che si chiama — equivocamente, abbiamo detto — la intuizione e la sua debolezza e la sua capacità di condurci fuori strada.

La critica dei principi della matematica, che ha avuto la sua stagione di massima fioritura a partire dalla seconda metà del secolo scorso, ha condotto, come è ben noto, alla valutazione precisa del significato della geometria. Questa branca della matematica era tradizionalmente considerata come determinata e specificata dai suoi contenuti, e veniva classicamente definita come scienza dello spazio o della estensione o di altri enti che hanno una esistenza altrettanto problematica.

La dimostrazione della esistenza legittima delle geometrie non euclidee, ed addirittura la osservazione della possibilità di provare la logica coerenza dalla geometria non euclidea con modelli immersi nella euclidea, ha condotto ad una riforma radicale di questa concezione, ed anche a far giustizia della esistenza e delle qualità di quegli pseudo-enti di cui abbiamo detto.

Sulla strada di questa elaborazione critica si è giunti — come è noto — alla concezione moderna della geometria. Da una parte questa dottrina è concepita come un sistema ipotetico-deduttivo, nel quale gli enti di cui si parla non hanno che una definizione implicita, data dal sistema delle proposizioni primitive che sono state scelte. Da parte loro queste ultime non hanno alcuna pretesa di fondarsi sulla esperienza o sulla intuizione e quindi di rendere la realtà degli enti che vengono nominati. La validità delle proposizioni dedotte (teoremi) è quindi data esclusivamente dal fatto che esse sono state ricavate con procedimenti logici corretti e rigorosi dalle proposizioni che sono state scelte come primitive.

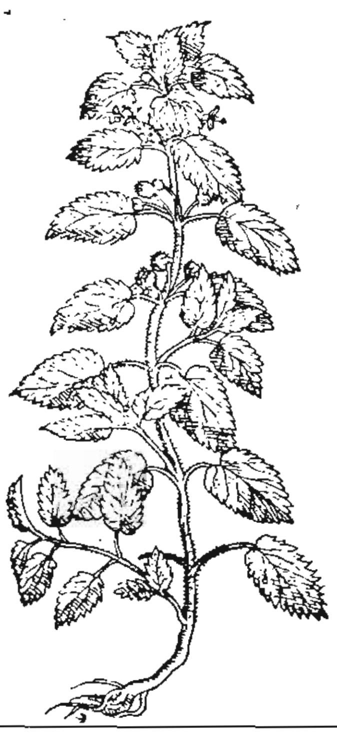
In una seconda concezione, la geometria costituisce in certo senso il primo capitolo della fisica, perché viene considerata come una dottrina che razionalizza metodicamente le nostre esperienze sui corpi esterni, sulla loro forma e mutua posizione: tale dottrina è quindi diretta a coordinare in sede teorica il complesso delle sensazioni che l'esperienza ci fornisce e che sono di natura assai varia: sensazioni visive, tattilo-muscolari, di propriocezione.

È chiaro che a questo punto si può aprire un discorso molto più articolato di quanto non si possa pensare a prima vista. Infatti la geometria, nel senso di primo capitolo della fisica, da una parte fornisce la giustificazione dello studio della geometria come sistema ipotetico-deduttivo e dall'altra fornisce il materiale della prima matematizzazione della realtà fisica.

Invero anzitutto la geometria intesa come primo capitolo della fisica fornisce le indicazioni per la scelta delle proposizioni primitive. A priori infatti la scelta degli assiomi, intesi come proposizioni primitive della teoria geometrica, è ampiamente libera, perché deve soltanto rispondere alla condizione fondamentale della non contraddizione. Ma la differenza tra una geometria, intesa come puro gioco logico con concetti definiti implicitamente da assiomi arbitrari, e la dottrina puramente arbitraria di un gioco convenzionale (del tipo del gioco degli scacchi) è data dal fatto che una dottrina ipotetico-deduttiva che voglia chiamarsi ancora col nome di geometria, deve almeno lasciarsi suggerire (non imporre) dalla esperienza certe proposizioni primitive. È questa una richiesta che non può ovviamente essere sostenuta con ragionamenti rigorosamente logici, ma soltanto con ragioni di convenienza, di opportunità, di tradizione storica; ma non si può negare che queste ragioni abbiano un loro fondamento psicologico ed una loro validità, soprattutto al livello didattico.

Ci pare che si possa difficilmente contestare che il primo impulso alla matematizzazione è venuto all'uomo proprio dalla necessità della descrizione razionale, scientifica (per quanto ciò sia possibile) delle proprie esperienze sui corpi rigidi. Il concetto elementare della operazione di misura è proprio basato — a nostro parere — sulla invarianza di certi campioni rispetto alle operazioni di manipolazione; e prima tra queste operazioni è proprio il trasporto rigido. Questa invarianza, accettata prima come un dato evidente delle nostre esperienze, enunciata poi come una ipotesi che si accetta in modo provvisorio, ma che è molto comoda per una prima razionalizzazione della realtà, sta alla base del primo sviluppo della matematica. E questo collegamento con l'esperienza elementare, la cui elaborazione fantastica viene spesso chiamata « intuizione geometrica », è provata storicamente dal fatto che la geometria euclidea è stata per almeno venti secoli la geometria unica e principale della umanità. E del resto anche la concezione del continuo geometrico, di cui abbiamo detto, intesa come una proprietà fondamentale della estensione è pure estrapolata dalle esperienze fatte con i nostri sensi sulla realtà fisica sensibile ai tempi in cui quel tipo di descrizione della realtà fisica è nata. Sappiamo che la fisica di oggi non accetta la continuità della materia ed invece adotta lo schema del discontinuo come più comodo o, come direbbe Poincaré, più adeguato alla de-

ORTICA PRIMA.



scrizione della esperienza; ma ciò non toglie che questo schema sia ancora adottato da molte dottrine geometriche e da vaste branche della matematica, come l'analisi matematica classica, molti capitoli della topologia e così via.

Pertanto ci pare di poter concludere che ciò che interessa in modo particolare, nel lavoro didattico, è la ricerca di un equilibrio costante tra la percezione elementare dei nostri sensi (soggetta alla fallacia che i filosofi da tempo hanno criticato), la elaborazione fantastica della nostra sensazione (che ci stimola ad estendere indefinitamente la loro portata) e la logica che ci impone di accettare soltanto le deduzioni ineccepibili.

Si potrebbe dire che tutta la storia della matematica è una descrizione della mutua influenza di queste situazioni psicologiche, che si condizionano l'una con l'altra.

4. - Il discorso didattico che si impianta su queste osservazioni è abbastanza complesso, e presenta diverse facce. Si potrebbe dire che un primo problema che si può formulare porta a domandarsi quale tipo di rigore matematico, o meglio quale tipo di matematica si vuole insegnare quando si insegna la matematica nella scuola. Abbiamo già detto che la moda attualmente prevalente tende ad una formalizzazione sempre crescente, ad una riduzione della deduzione ad un calcolo, ad una esasperazione della sintassi del calcolo logico, a scapito di quella che potrebbe venire chiamata la semantica.

Non contestiamo che questa sia la tendenza generale della matematica, a livello di ricerca scientifica astratta. Ma di fronte a queste tendenze fondamentali ed inarrestabili della scienza di oggi stanno i problemi della didattica, che istituiscono una dialettica di esigenze e di procedure che merita di essere analizzata ed approfondita.

Sarebbe infatti troppo semplicistico proporre immediatamente al discente una matematica completamente formalizzata al suo più alto livello in tutti gli stadi di apprendimento; a nostro parere infatti il problema didattico fondamentale consiste nel presentare le teorie matematiche a quel livello di astrazione e di generalità al quale il discente sia stimolato e motivato all'apprendimento non soltanto delle strutture intese come strumenti di conoscenza di altri contenuti, ma anche delle strutture in se stesse, considerate come oggetti di studio autonomi.

Noi abbiamo sempre pensato — ripetiamo — che l'insegnante di matematica non sia l'insegnante di una materia puramente tecnica, una specie di male necessario, date le applicazioni della matematica alla vita civile ed alla tecnica ed alla scienza; pensiamo invece che la matematica abbia un suo compito formativo della mentalità scientifica e in generale della mentalità dell'uomo coerente con se stesso.

Ora se teniamo presenti questi scopi, si può osservare che, se si tiene l'insegnamento ad un livello troppo basso e legato alle applicazioni, manca quello stimolo alla generalizzazione che è fondamento della mentalità scientifica; se invece, al polo opposto, teniamo l'insegnamento ad un livello troppo astratto e generale, rischiamo di far perdere il significato concreto delle strutture formali che insegniamo.

A nostro parere quindi, come abbiamo detto, l'opera dell'insegnante dovrebbe costantemente ricercare un giusto equilibrio, mirando sì al rigore logico ed alla astrattezza della matematica moderna, ma giungendovi con un procedimento non traumatico, non imposto, non distaccato dai procedimenti che potremmo chiamare naturali della mente umana.

A questo fine vorremmo ritornare sul discorso della geometria elementare, che per secoli è stata una palestra validissima di formazione matematica per varie ragioni, che vorremmo richiamare qui, per aiutare a raggiungere nell'insegnamento quell'equilibrio e quindi quella efficacia di cui dicevamo poco fa.

In primo luogo riteniamo che un aspetto positivo dell'impiego della geometria elementare nella formazione matematica sia dato dal suo distacco dal formalismo; in altre parole, le deduzioni della geometria elementare sono fatte non con il calcolo, ma ancora con il metodo verbale, discorsivo tradizionale, il che, come dicevamo, dovrebbe poter aiutare il docente a far riflettere il discente sulle strutture logiche fondamentali che egli adopera sempre, e fargli quindi prendere coscienza di tali strutture, che sono indipendenti dall'impiego di un formalismo quale che sia.

L'impianto delle convenzioni della geometria analitica su questi fondamenti aprirebbe poi un validissimo discorso di analisi e di critica a proposito del linguaggio algebrico e dei contenuti geometrici che si vogliono studiare col suo aiuto. È augurabile che una analisi critica cosiffatta possa essere veramente formativa; ma a questo scopo occorre che possa spaziare in ambiti ben più vasti di quelli tradizionali, legati alla discussione delle equazioni di II grado contenenti un parametro, discussione che ha condotto a quella che i francesi chiamano scherzosamente « malattia della trinomite ».

Un altro vantaggio che vediamo nell'impiego giudizioso della geometria elementare è la utilizzazione della fantasia e della immaginazione nella matematica.

Abbiamo già detto quali siano i limiti che la critica di oggi assegna alla geometria, che non è più intesa come una scienza di valore assoluto, almeno per quanto riguarda i contenuti. Ma ciò non inficia il suo valore formativo, quando la si intenda come primo livello, del tutto elementare, della matematizzazione della realtà sperimentale, beninteso quando siano messi in evidenza i limiti e criticata sufficientemente la sua portata. Non vediamo perché, in nome di un rigore formalistico che vuole eliminare del tutto la immaginazione, si debba ignorare del tutto l'insieme dei suggerimenti che l'esperienza comune della concreta manipolazione degli oggetti rigidi (intesi approssimativamente come rigidi) può apportare alla razionalizzazione e quindi alla sistemazione teorica delle nostre esperienze.

Beninteso la fantasia dovrebbe soltanto suggerire, non imporre i procedimenti logici di dimostrazione, ma (ripetiamo) l'ausilio della fantasia appare estremamente utile, se non addirittura necessario, per dare dei contenuti ai ragionamenti, per dare un appoggio ed un interesse alla deduzione.

5. - Ovviamente non abbiamo ricette infallibili e valide per tutti i casi, da presentare come formule magiche per il lavoro didattico concreto. È questo un lavoro delicatissimo, che dovrebbe mirare alla formazone dell'uomo: nel caso della matematica poi questo lavoro dovrebbe condurre all'apprendimento del metodo scientifico ed alla adozione del linguaggio matematico in genere, e del simbolismo in particolare, come strumento di deduzione e anche come il linguaggio universale della scienza di oggi. Il nostro desiderio sarebbe più modestamente quello di esortare all'equilibrio ed allo stimolo della attività del lavoro del singolo. Se l'insegnamento deve essere, almeno nelle intenzioni, uno stimolo alla crescita interiore della persona del discente, non pensiamo che vi siano delle facoltà da escludere, né dei contenuti da eliminare; nel caso in esame, non pensiamo che la fantasia creatrice e la immaginazione siano delle facoltà da eliminare e mortificare; bensì crediamo che siano delle facoltà da imbrigliare, da controllare, da educare ai fini di quella costruzione della personalità che è lo scopo principale ed ultimo di ogni insegnamento.

Del resto noi siamo sempre del parere che la pedagogia sia classificabile in quella categoria che la saggezza antica chiamava *ars:* la definizione di questa era data dalla frase *recta ratio factibilium:* un'opera cioè che non ignora la scienza astratta, la quale è insostituibile come radice e fondamento di tutto il lavoro dell'educatore; ma che ha il suo compimento supremo in quella azione unica ed insostituibile dell'uomo sull'uomo che deve essere guidata, nella sua concretezza, dalla prudenza, dalla solidarietà, in una parola, dall'amore per la propria professione e per i soggetti che noi avviciniamo. Perché ciò possa avvenire, occorre anzitutto una profonda conoscenza della materia da insegnare, ma non deve neppure mancare la conoscenza, almeno rudimentale, dei processi di apprendimento e di evoluzione psicologica dei giovani. Questi pensieri giustificano un certo scetticismo di fronte a molti procedimenti che sono oggi considerati come dei toccasana per l'insegnamento; è questa una attività che non si riduce soltanto al momento addestrativo, allo stabilire dei circuiti « stimolo-risposta-rinforzo »; anche se la scuola potrà utilizzare queste conoscenze e queste tecniche, riteniamo che il maestro sia insostituibile, perché la sua opera ed il suo impegno personale non possono essere surrogati da macchine o da procedimenti standardizzati uguali per tutti.

Un precedente storico degno di meditazione è dato dal caso di Etienne Pascal, padre di Blaise, che aveva studiato una strategia educativa per il proprio geniale figlio e che ebbe la saggezza di modificarla quando si accorse che questi aveva esigenze diverse da quelle che lui pensava. Non a tutti capita di avere come allievi dei Blaise Pascal; ma tutti possiamo imparare dalla intelligenza e dalla umiltà di quel padre per avere sempre quella vigile attenzione al caso concreto che è una delle condizioni per la riuscita dell'opera educativa.